

**С.В.ГЛАДКОВ**, НТУ «ХПИ»; **К.В.НАУМЕНКО**, канд.техн.наук,  
Университет Мартина Лютера, Халле, Германия

## СВОБОДНЫЕ ВРАЩЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

У статті розглядаються вільні ротації абсолютно твердого циліндра з урахуванням в'язкого тертя. Наведено аналітичне рішення для вектору правої кутової швидкості, та числове рішення для вектору положення тіла методом Рунге-Кутта 4-5 порядку в Maple. Проведено порівняння аналітичного рішення з числовим, та зроблено висновок про їх ідентичність. Високої точності числового рішення сприяло використання вектору ротації для опису поворотів тіла, а не тензору ротації чи кутів Ейлера.

Free rotations of rigid cylinder with viscous friction were considered in the article. It was given analytical solution for vector of right angular velocity and numerical solution for position vector using Runge-Kutta 4-5<sup>th</sup> order method in Maple. Analytical and numerical solutions were compared and it was shown high accuracy of numerical methodic, which was the result of using of rotation vector rather then rotation tensor or Euler's arcs.

**Введение.** В практической инженерной деятельности нашли широкое применение так называемые коротковолокнистые композиционные материалы (длина волокон 0,1-1 мм, диаметр не превышает 1/10 длины). Для многих геометрически сложных элементов конструкций одним же из самых удобных методов их создания является литье под давлением. Однако в процессе заливки полимерной суспензии в форму под давлением поток переносит и вращает волокна, в результате чего механические свойства готового изделия станут неоднородными и анизотропными.

В связи со сложностью задачи расчета положения волокон в полученной конструкции в зависимости от метода заливки имеет практический интерес задача исследования поведения одной отдельной частицы с учетом вязкого трения и разработки эффективного алгоритма расчета ее положения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим цилиндр с высотой  $h$ , радиусом  $R$  и состоящий из материала плотностью  $\rho$ , изображенный на рисунке. Вектор  $\vec{m}_0$  задает направление оси цилиндра, а произвольные его точки в различные моменты времени описываются вектором положения  $\vec{r}(t)$ .

Выберем систему отсчета так, чтобы центр масс тела в ней покоился, и, следовательно, его количество движения обращалось бы в нуль. В качестве полюса в теле выберем центр масс  $O$ . Центральный тензор инерции тела в начальном положении определяется выражением

$$\hat{C}_0 = \lambda \vec{m}_0 \otimes \vec{m}_0 + \mu (\hat{E} - \vec{m}_0 \otimes \vec{m}_0), \quad (1)$$

где  $\hat{E}$  – единичный тензор, а коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  задаются следующими выражениями [1]:

$$\lambda = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 h; \quad \mu = \frac{1}{12} \rho \pi (3R^4 h + R^2 h^3). \quad (2)$$

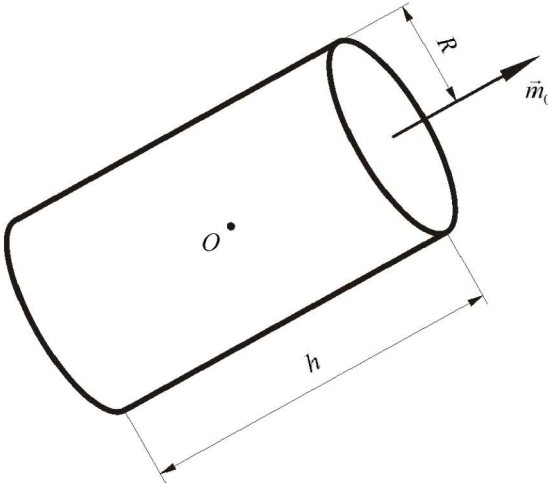
Тензор инерции в актуальном положении определяется формулой

$$\hat{C}(t) = \hat{P}(t) \cdot \hat{C}_0 \cdot \hat{P}^T(t), \quad (3)$$

где  $\hat{P}(t)$  – тензор поворота, и  $\hat{P}(0) = \hat{E}$ .

Введем в рассмотрение угловую скорость тела

$$\frac{d}{dt} \hat{P}(t) = \bar{\omega}(t) \times \hat{P}(t) = \hat{P}(t) \times \bar{\Omega}(t), \quad (4)$$



Рассматриваемый цилиндр

где  $\bar{\omega}(t)$  называется вектором левой угловой скорости, или просто вектором угловой скорости, а  $\bar{\Omega}(t)$  – вектором правой угловой скорости (эти уравнения называются уравнениями Пуассона). Между этими векторами существует простая связь

$$\bar{\omega}(t) = \hat{P}(t) \cdot \bar{\Omega}(t). \quad (5)$$

Кинетический момент тела определяется известной формулой:

$$\bar{K}_2(t) = \hat{C}(t) \cdot \bar{\omega}(t). \quad (6)$$

Сила трения действующая на тело равна

нулю. Вычислим момент сопротивления, действующий на тело. Для этого рассмотрим бесконечно малую часть поверхности цилиндра  $dA$ . Сила трения на этой площадке  $d\vec{F} = -\kappa \vec{v} dA$ , где  $\kappa$  – коэффициент трения. Скорость точек тела определяется выражением  $\vec{v} = \bar{\omega} \times \vec{r}$ . Следовательно, сила трения на малой площадке  $d\vec{F} = -\kappa (\bar{\omega} \times \vec{r}) dA$ , а момент силы трения всего тела:

$$\int_A \vec{r} \times d\vec{F} = -\kappa \int_A \vec{r} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}) dA = -\kappa \bar{\omega} \cdot \int_A [r^2 \hat{E} - \vec{r} \otimes \vec{r}] dA. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение тензор вязкого трения

$$\hat{G}_0 = \kappa \int_A [r^2 \hat{E} - \vec{r} \otimes \vec{r}] dA. \quad (8)$$

Из соображений симметрии можно заключить, что этот тензор является трансверсально-изотропным и допускает представление

$$\hat{G}_0 = \alpha \hat{m}_0 \otimes \hat{m}_0 + \beta (\hat{E} - \hat{m}_0 \otimes \hat{m}_0), \quad (9)$$

где коэффициенты, после интегрирования выражения (8), равны

$$\alpha = \kappa\pi R(R^3 + 2R^2h),$$

$$\beta = \kappa\pi R\left(\frac{1}{2}R^3 + R^2h + \frac{1}{2}Rh^2 + \frac{1}{6}h^3\right). \quad (10)$$

Второй закон динамики для рассматриваемого тела примет вид

$$\frac{d}{dt}\bar{K}_2(t) = -\hat{G}(t) \cdot \bar{\omega}(t), \quad (11)$$

где  $\hat{G}(t) = \hat{P}(t) \cdot \hat{G}_0 \cdot \hat{P}^T(t)$ . Перепишем его в терминах правой угловой скорости  $\bar{\Omega}(t)$  используя формулы (3-6):

$$\hat{C}_0 \cdot \bar{\Omega}(t) + \bar{\Omega}(t) \times \hat{C}_0 \cdot \bar{\Omega}(t) = -\hat{G}_0 \cdot \bar{\Omega}(t). \quad (12)$$

Умножая обе части равенства (12) слева на  $\hat{C}_0^{-1}$  и учитывая некоторые тождества[1], получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\bar{\Omega}(t) + \frac{1}{\det \hat{C}_0} \left[ \hat{C}_0 \cdot \bar{\Omega}(t) \right] \times \left[ \hat{C}_0^2 \cdot \bar{\Omega}(t) \right] = -\hat{C}_0^{-1} \cdot \hat{G}_0 \cdot \bar{\Omega}(t). \quad (13)$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение относительно неизвестного вектора правой угловой скорости  $\bar{\Omega}(t)$  с начальным условием  $\bar{\Omega}(0) = \bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0$ . Однако требуется определить также и вектор положения частицы  $\bar{m}(t)$  – такая задача называется задачей Дарбу. Его можно определить через неизвестный пока тензор поворота  $\hat{P}(t)$ :

$$\bar{m}(t) = \hat{P}(t) \cdot \bar{m}_0. \quad (14)$$

Для отыскания же этого неизвестного тензора поворота можно воспользоваться, например, уравнениями Пуассона (4). Однако мы поступим по-другому и введем вектор поворота

$$\bar{\theta} = \theta \bar{l}, \quad l = 1, \quad (15)$$

где единичный вектор  $\bar{l}(t)$  определяет ось поворота, а величина  $\theta(t)$  задает угол поворота в радианах. Тогда тензор поворота можно представить в эквивалентном виде через вектор поворота:

$$\hat{P}(\bar{\theta}) = \frac{1 - \cos \theta(t)}{\theta^2(t)} \bar{\theta}(t) \otimes \bar{\theta}(t) + \frac{\sin \theta(t)}{\theta(t)} \bar{\theta}(t) \times \hat{E} + \cos \theta(t) \hat{E}. \quad (16)$$

Можно тогда показать [1], что в терминах вектора поворота правая задача Дарбу имеет вид

$$\frac{d}{dt}\bar{\theta}(t) = \bar{\Omega}(t) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(t) \times \bar{\Omega}(t) + \frac{1 - g(t)}{\theta^2(t)} \bar{\theta}(t) \times [\bar{\theta}(t) \times \bar{\Omega}(t)],$$

$$g(t) = \frac{\theta(t) \sin \theta(t)}{2[1 - \cos \theta(t)]}, \quad (17)$$

$$\bar{\theta}(0) = \bar{\theta}_0.$$

**Аналитическое определение правой угловой скорости.** Аналитически решим задачу (13) относительно  $\bar{\Omega}(t)$ . Воспользуемся представлениями (1) и (9) для тензоров  $\hat{C}_0$  и  $\hat{G}_0$  соответственно, подставим их в задачу (13) и проделаем некоторые алгебраические преобразования. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\Omega}(t) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left[ \bar{\Omega}(t) \cdot \bar{m}_0 \right] \bar{m}_0 \times \bar{\Omega}(t) + \\ + \left( \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\mu} \right) \left[ \bar{\Omega}(t) \cdot \bar{m}_0 \right] \bar{m}_0 + \frac{\beta}{\mu} \bar{\Omega}(t) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее представим вектор начальной угловой скорости  $\bar{\Omega}_0$  в виде разложения по двум ортогональным векторам  $\bar{m}_0$  и  $\bar{b}_0$ :

$$\bar{\Omega}_0 = a_1 \bar{m}_0 + a_2 \bar{b}_0, \quad \bar{m}_0 \cdot \bar{b}_0 = 0, \quad b_0 = 1. \quad (19)$$

Будем искать решение в виде разложения по ортонормированному базису  $\{\bar{m}_0, \bar{b}_0, \bar{m}_0 \times \bar{b}_0\}$ :

$$\bar{\Omega}(t) = \psi_1(t) \bar{m}_0 + \psi_2(t) \bar{b}_0 + \psi_3(t) [\bar{m}_0 \times \bar{b}_0]. \quad (20)$$

Подставим разложение (20) в уравнение (18), а затем скалярно домножим результат на векторы  $\{\bar{m}_0, \bar{b}_0, \bar{m}_0 \times \bar{b}_0\}$  – получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^3$  в разложении (20):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) + \frac{\alpha}{\lambda} \psi_1(t) &= 0, \\ \dot{\psi}_2(t) - \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \psi_1(t) \psi_3(t) + \frac{\beta}{\mu} \psi_2(t) &= 0, \\ \dot{\psi}_3(t) + \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \psi_1(t) \psi_2(t) + \frac{\beta}{\mu} \psi_3(t) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Ее решение

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= C_1 e^{\frac{-\alpha}{\lambda} t}, \\ \psi_2(t) &= e^{\frac{-\beta}{\mu} t} [C_2 \sin \gamma(t) + C_3 \cos \gamma(t)], \\ \psi_3(t) &= e^{\frac{-\beta}{\mu} t} [-C_2 \cos \gamma(t) + C_3 \sin \gamma(t)], \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\gamma(t) = C_1 \left[ \frac{\lambda \mu - \lambda^2}{\alpha \mu} \right] e^{\frac{-\beta}{\mu} t}$ . Используя начальные условия (19) найдем

константы  $\{C_i\}_{i=1}^3$ :

$$\begin{aligned}
C_1 &= a_1, \\
C_2 &= a_2 \sin \gamma_0, \\
C_3 &= a_2 \cos \gamma_0,
\end{aligned}
\tag{23}$$

$$\text{где } \gamma_0 = a_1 \left[ \frac{\lambda \mu - \lambda^2}{\alpha \mu} \right].$$

Таким образом, получено аналитическое решение задачи (13) для правой угловой скорости  $\vec{\Omega}(t)$ .

**Численное определение правой угловой скорости и положения частицы.** Решим поставленную задачу численно. Для этого введем ортонормированный базис  $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$  – вектор  $\vec{e}_1$  для простоты направим по оси, натянутой на вектор начального положения  $\vec{m}_0$ ,  $\vec{e}_2$  расположим в плоскости, ортогональной  $\vec{e}_1$ , и  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ . Все используемые величины можно без труда записать в этой системе координат. Подставим их в уравнение баланса кинетического момента (13) и в задачу Дарбу (17). Получим 6 уравнений относительно компонент вектора правой угловой скорости  $\{\Omega_i(t)\}_{i=1}^3$  и компонент вектора поворота  $\{\theta_i(t)\}_{i=1}^3$ :

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}_1(t) &= -\frac{\alpha}{\lambda} \Omega_1(t), \\
\dot{\Omega}_2(t) &= \left[ 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right] \Omega_1(t) \Omega_3(t) - \frac{\beta}{\mu} \Omega_2(t), \\
\dot{\Omega}_3(t) &= -\left[ 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right] \Omega_1(t) \Omega_2(t) - \frac{\beta}{\mu} \Omega_3(t),
\end{aligned}
\tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1(t) &= \Omega_1(t) + \frac{1}{2} \theta_2(t) \Omega_3(t) - \frac{1}{2} \theta_3(t) \Omega_2(t) + \\
&+ \frac{1-g(t)}{\theta^2(t)} [\theta_1(t) \theta_2(t) \Omega_2(t) - \theta_2(t) \Omega_1(t) - \theta_3(t) \Omega_1(t) + \theta_1(t) \theta_3(t) \Omega_3(t)], \\
\dot{\theta}_2(t) &= \Omega_2(t) + \frac{1}{2} \theta_3(t) \Omega_1(t) - \frac{1}{2} \theta_1(t) \Omega_3(t) + \\
&+ \frac{1-g(t)}{\theta^2(t)} [\theta_2(t) \theta_3(t) \Omega_3(t) - \theta_3(t) \Omega_2(t) - \theta_1(t) \Omega_2(t) + \theta_1(t) \theta_2(t) \Omega_1(t)], \\
\dot{\theta}_3(t) &= \Omega_3(t) + \frac{1}{2} \theta_1(t) \Omega_2(t) - \frac{1}{2} \theta_2(t) \Omega_1(t) + \\
&+ \frac{1-g(t)}{\theta^2(t)} [\theta_1(t) \theta_3(t) \Omega_1(t) - \theta_1(t) \Omega_3(t) - \theta_2(t) \Omega_3(t) + \theta_2(t) \theta_3(t) \Omega_2(t)],
\end{aligned}
\tag{25}$$

где  $\theta(t) = \sqrt{\theta_1^2(t) + \theta_2^2(t) + \theta_3^2(t)}$ ,  $g(t) = \frac{\theta(t) \sin \theta(t)}{2[1 - \cos \theta(t)]}$ . Решение этой сис-

темы связанных обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений проведем в Maple 8.0 используя метод Рунге-Кутты 4-5 порядка.

**Анализ результатов.** Сравним полученное аналитически выражение для правой угловой скорости (20, 22, 23) с численным. Для получения численного решения зададим конкретные значения для всех параметров в уравнениях (24, 25):  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $R = 0,05 \text{ м}$ ,  $h = 0,1 \text{ м}$ ,  $\kappa = 78 \text{ кг/(с}\cdot\text{м}^2)$ . Начальные условия положим:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(0) &= \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \\ \bar{\theta}(0) &= \bar{0}.\end{aligned}\tag{26}$$

Результаты расчетов и абсолютная погрешность вычислений приведены в таблице. Характеристикой для сравнения выбрана длина вектора правой угловой скорости  $\Omega(t)$ .

Из таблицы видно, что абсолютная погрешность очень мала и, к тому же, меньше погрешности метода интегрирования. Численное решение почти точно совпадает с аналитическим.

Сравнение аналитического и численного решения для  $\Omega(t)$

Время, с.	Аналитическое решение	Численное решение	Абсолютная погрешность
1	0,8226034382	0,8226033720	$0,662 \cdot 10^{-7}$
3	0,1113272693	0,1113271867	$0,826 \cdot 10^{-7}$
5	0,01506650752	0,01506646648	$0,41 \cdot 10^{-7}$
10	$0,1015173291 \cdot 10^{-3}$	$0,1014993235 \cdot 10^{-3}$	$0,18 \cdot 10^{-7}$

**Заключение.** В работе было получено аналитическое решение для вектора правой угловой скорости и численное для вектора положения свободно вращающейся частицы с учетом вязкого трения. Также была написана программа для визуальной симуляции поведения частицы при любых комбинациях начальных условий.

Полученное численное решение для вектора правой угловой скорости сравнивалось с аналитическим и был сделан вывод о его высокой точности. Следовательно, разработанную численную процедуру можно рекомендовать для других подобных расчетов. По мнению авторов, хорошему совпадению численных и аналитических результатов способствовало использование вектора поворота, а не тензора поворота или углов Эйлера для описания поворотов тела.

**Список литературы:** 1. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. – СПб.: Издательство СПбГТУ, 1992. 2. Maple 8.0. Advance Programming Guide (в электронном виде). 3. Maple 8.0. Help (в электронном виде).

*Поступила в редколлегию 02.09.2006.*